Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу, Србија
http://www.pmf.ni.ac.rs/mii
Математика и информатика 4(1) (2017), 17-23

Zadaci sa brojem 2017

Aleksandra B. Simić
Učenik Gimnazije „Svetozar Marković“ u Nišu
anasimic99@gmail.com

Dušan J. Simjanović
Prirodno-matematički fakultet u Nišu
Univerzitet Metropolitan (Centar u Nišu)
OŠ „Vuk Karadžić“ u Doljevcu
dsimce@gmail.com

Kako je rekao čuveni matematičar Georg Polya,

„...i pri najskromnijem zadatku, ako on budi interesovanje, ako pokreće dovitljivost, i ako ga učenik rešava sopstvenim snagama, doživeće napetost i trijumf pronalazača. Takvi doživljaji u periodu koji je pristupačan utiscima mogu stvoriti sklonost ka umnom radu i utisnuti doživotni pečat na duh i karakter.
...jer, okusi li jednom radost u matematici, neće je lako zaboraviti...“

Priču počinjemo zadatkom namenjenim najmlađim ljubiteljima matematike, u kome nekoliko puta navodimo cifre broja 2017 odvojene osnovnim računskim operacijama.

Nastavljamo zadacima namenjenim đacima viših razreda osnovne škole i srednjoškolcima, u nadi da će ove reči čuvenog matematičara dopreti do sivih ćelija budućih pokolenja i da će neko od novih naraštaja krenuti ovim trnovitim, ali, pre svega, dopadljivim putem znanja.

Zadatak 1. Izračunati vrednost datih izraza:

a) $20 \cdot 17 + (20 - 17)^2 + 0 \cdot 17 - 20 + 1 - 720 + 17$;

b) $2 + 0 - 17 \cdot 20 : 17 - 20 + 17 + 201 \cdot 7 - 20 + 172 - 0 \cdot 17$.

Rešenje: Jednostavnim računanjem dobijamo rezultate -373 i 1538.

Zadatak 2. Razlika kvadrata razlike binoma $2017a - 2018b$ i $2018a - 2017b$ i razlike kvadrata tih binoma jednaka je?

Rešenje:

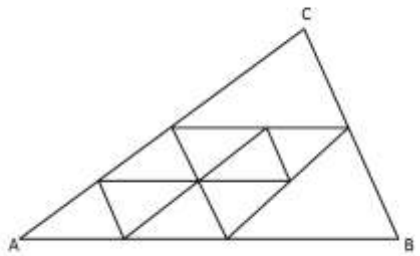
$$\big((2017a - 2018b) - (2018a - 2017b)\big)^2 - \big((2017a - 2018b)^2 - (2018a - 2017b)^2\big) =$$
$$(-a - b)^2 -$$
$$(2017^2a^2 - 2 \cdot 2017 \cdot 2018 \cdot ab + 2018^2b^2 - 2018^2a^2 + 2 \cdot 2017 \cdot 2018 \cdot ab - 2017^2b^2)$$
$$= (a + b)^2 - \big(a^2(2017^2 - 2018^2) + b^2(2018^2 - 2017^2)\big)$$
$$= (a + b)^2 + 4035a^2 - 4035b^2 = (a + b)^2 + 4035(a^2 - b^2)$$
$$= (a + b)^2 + 4035(a - b)(a + b) = (a + b)\big(a + b + 4035(a - b)\big)$$

$= 2(a + b)(2018a - 2017b)$

Napomena: Drugo tumačenje formulacije zadatka ostavljamo čitaocu na razmatranje.

Zadatak 3. Trougao ABC podeljen je svojim srednjim linijama na 4 trougla, a zatim su, neki od tako dobijenih trouglova, istim tim postupkom, podeljeni na nove trouglove. Može li se, ponavljanjem ovog postupka, trougao ABC podeliti na:

a) 217 trouglova?
b) 2017 trouglova?



Rešenje: Pri svakom deljenju nekog trougla na 4 trougla, ukupan broj trouglova povećava se za 3, pa zaključujemo (može se proveriti, recimo, matematičkom indukcijom) da će broj trouglova posle svakog deljenja imati oblik $3k + 1$, $k \in N$.

Kako je brojeve 217 i 2017 moguće zapisati u obliku $3k + 1$ za $k = 72$, odnosno $k = 672$, jasno je da se datim postupkom može dobiti traženi broj trouglova.

Zadatak 4. Za koliko je zbir svih pravih neparnih razlomaka sa imeniocem 2017 manji od zbira svih pravih parnih razlomaka sa imeniocem 2017?

Rešenje: Uslov zadatka predstavićemo jednačinom

$$\frac{1}{2017} + \frac{3}{2017} + \cdots + \frac{2015}{2017} + x = \frac{2}{2017} + \frac{4}{2017} + \cdots + \frac{2016}{2017},$$

odakle se, zbog jednake razlike između odgovarajućih sabiraka sa leve i desne strane, lako zaključuje da je $x = \frac{1008}{2017}$.

Zadatak 5. Uroš je na takmičenju u streljaštvu osvojio ukupno 2017 poena. Ako pogodak u malu metu donosi 19, a pogodak u veliku metu 6 poena i ako je ukupno 217 hitaca iz Uroševe puške pogodilo metu, koliko je puta pogođena mala, a koliko puta velika meta?

Rešenje: Neka je Uroš x puta pogodio veliku i y puta malu metu. Iz uslova zadatka dobijamo da je $x + y = 217$, odnosno $6x + 19y = 2017$, odakle se, ako ovaj sistem jednačina rešavamo metodom zamene, dobijamo da je $y = 55$ i $x = 162$.
Dakle, mala meta je pogođena 55, a velika 162 puta.

Zadatak 6. U ribnjaku se nalazi 2017 gladnih štuka. Da bi se jedna štuka zasitila mora da pojede tri štuke, bile one gladne ili site. Koliko je najviše moguće da sitih štuka ostane u ribnjaku?

Rešenje: Glavna ideja ovoga zadatka je da što manje štuka bude pojedeno, odnosno, da se štuke koje preostanu, zasite samo gladnim štukama, ili onima koje su pojele što je moguće manje štuka. Najpovoljniji način je da jedna gladna štuka pojede jednu štuku i da 504 štuke pojedu po tri slabije štuke, uključujući i onu koja je već pojela jednu štuku. Tako u ribnjaku ostanu 504 site štuke.

Zadatak 7. Dokazati da važi nejednakost

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{2017}{2018!}<1.$$

Rešenje: Kako je $\frac{1}{2!}=\frac{2}{2!}-\frac{1}{2!}$; $\frac{2}{3!}=\frac{3}{3!}-\frac{1}{3!}$; $\cdots$; $\frac{2017}{2018!}=\frac{2018}{2018!}-\frac{1}{2018!}$; imamo da je

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{2017}{2018!}=\left(\frac{2}{2!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{3}{3!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots+\left(\frac{2018}{2018!}-\frac{1}{2018!}\right)=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2017!}-\frac{1}{2018!}\right)=1-\frac{1}{2018!}<1,$$

čime je nejednakost dokazana.

Zadatak 8. Dokazati da je $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2017}\right)^{2017}<1.$

Rešenje: Jasno je da, uz korišćenje činjenice da je $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n\,(n-1)}, n\geq 2$, važi niz nejednakosti

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2017}\right)^{2017}$$
$$<\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2017}\right)^2$$
$$<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{2016\cdot 2017}.$$

Kako je $\frac{1}{n\,(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, imamo da je

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{2016\cdot 2017}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017}=1-\frac{1}{2017}<1.$$

Zadatak 9. Kojom se cifrom završava broj

$$x=2013^{2017}+2014^{2016}+2015^{2015}+2016^{2014}+2017^{2013}\ ?$$

Rešenje: Lako se utvrđuje da važe sledeće kongruencije:

$$2013^{2017}\equiv_{10}3^{2017}\equiv_{10}3,\ 2014^{2016}\equiv_{10}4^{2016}\equiv_{10}6,\ 2015^{2015}\equiv_{10}5^{2015}\equiv_{10}5$$

$$2016^{2014}\equiv_{10}6^{2014}\equiv_{10}6,\ 2017^{2013}\equiv_{10}7^{2013}\equiv_{10}7,$$

odakle sledi da je $x\equiv_{10}7$, odnosno, poslednja cifra broja x je cifra 7.

Zadatak 10. Odrediti poslednje dve cifre brojeva 6^{2017} i 7^{2017}.

Rešenje: Neposrednim izračunavanjem lako se utvrđuje da se brojevi 6^2, 6^3, 6^4, 6^5, 6^6, 6^7 ,... završavaju redom ciframa 36, 16, 96, 76, 56, 36,.... Dakle, periodično se ponavljaju poslednje cifre sa periodom od 5 brojeva. Kako je $2017=5\cdot 403+2$, zaključujemo da se broj 6^{2017} završava istim ciframa kao i broj 6^2, odnosno sa 36.

Kako je $7^4 = 2401$ i $2017 = 4 \cdot 504 + 1$, imamo da je $7^{2017} = 7^{2016+1} = (7^4)^{504} \cdot 7 = A \dots 01 \cdot 7 = B \dots 07$. Dakle, poslednje dve cifre broja 7^{2017} su 07.

Zadatak 11. U skupu kompleksnih brojeva odrediti rešenja jednačine

$$x(x+1)(x^2+x+2018) = -2017.$$

Rešenje: Jednostavnim transformacijama početna jednačina postaje $(x^2+x+1)(x^2+x+2017) = 0$. Zamenom izraza x^2+x sa t dobijamo kvadratnu jednačinu $t^2 + 2018t + 2017 = 0$, čija su rešenja $t_1 = -2017$ i $t_2 = -1$. Vraćanjem smene dobijamo rešenja $x_{1/2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{8067}}{2}$ i $x_{3/4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Zadatak 12. Odrediti prirodne brojeve m i n za koje važi

$$3mn(m-n) + n^3 = 2017 + m^3.$$

Rešenje: Prostim sređivanjem jednačina postaje $n^3 - 3n^2m + 3m^2n - m^3 = 2017$, odakle, korišćenjem obrasca za kub razlike, sledi da je $(n-m)^3 = 2017$. Kako je 2017 prost broj, ne postoji prirodan broj čiji je kub jednak broju 2017, pa samim tim ne postoje prirodni brojevi m i n koji ispunjavaju uslov zadatka.

Zadatak 13. Koliki je ostatak pri deljenju polinoma $P(x) = x^{2018} + x^{2017} + x^{2016} + 2017$ binomom $Q(x) = x^2 + 1$?

Rešenje: Polinom $P(x)$ možemo napisati u obliku $P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x)$, gde je $st(S(x)) = 2016$ i $st(R(x)) < 2$. Dakle,

$$x^{2018} + x^{2017} + x^{2016} + 2017 = (x^2+1) \cdot S_{2016}(x) + ax + b.$$

Zamenom vrednosti $x = i$ u prethodnu jednakost, kao i činjenica da je $i^{2016} = (i^4)^{504} = 1$, $i^{2017} = i$ i $i^{2018} = -1$, imamo da je $i + 2017 = a\,i + b$, odakle zaključujemo da je $a = 1$ i $b = 2017$. Traženi ostatak je $R(x) = x + 2017$.

Zadatak 14. Izračunati $x = \sqrt[2017]{2017 \sqrt[2017]{2017 \sqrt[2017]{2017 \sqrt[2017]{\cdots}}}}$.

Rešenje: Jasno je da je $x = 2017^{\frac{1}{2017}} \cdot 2017^{\frac{1}{2017^2}} \cdot 2017^{\frac{1}{2017^3}} \cdot \cdots$, odnosno $x = 2017^{\frac{1}{2017}+\frac{1}{2017^2}+\frac{1}{2017^3}+\cdots}$. Ako zbir iz izložioca broja x označimo sa S, $S = \frac{1}{2017} + \frac{1}{2017^2} + \frac{1}{2017^3} + \cdots$, kako je $a_1 = q = \frac{1}{2017}$, uz osobinu za zbir geometrijskog niza (reda) imamo da je $S = \frac{\frac{1}{2017}}{1-\frac{1}{2017}} = \frac{1}{2016}$, odnosno, $x = \sqrt[2016]{2017}$.

Zadatak 15. Napisati jednačinu elipse $(E)\colon b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ako su poznate jednačine dveju njenih tangenti $t_1\colon -x - y + 2016 = 0$ i $t_2\colon x + \sqrt{5}y - 2018 = 0$.

Rešenje: Iz jednačina tangenti elipse imamo da je $k_1 = -1$ i $k_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$, kao i da je

$n_1 = 2016$ i $n_2 = \frac{2018}{\sqrt{5}}$.

Iz uslova dodira elipse i prave, $a^2k^2 + b^2 = n^2$, dobijamo da je $a^2 + b^2 = 2016^2$ i $a^2 + 5b^2 = 2018^2$, odakle, recimo, zamenom a^2 sa $2016^2 - b^2$, dobijamo da je $b^2 = 2017$ i $a^2 = 2016^2 - 2017$.

Tražena jednačina elipse je $(E): \frac{x^2}{2016^2-2017} + \frac{y^2}{2017} = 1$.

Zadatak 16. Odrediti jednačinu tetive elipse $(E): \frac{x^2}{186} + \frac{y^2}{93} = 1$ koja je prepolovljena tačkom M $(\frac{2017}{217}, \frac{2017}{217})$.

Rešenje: Kako je tačka M središte duži AB, važi da je $\frac{2 \cdot 2017}{217} = m + p$ i $\frac{2 \cdot 2017}{217} = n + q$. Kako su tačke $A(m,n)$ i $B(p,q)$ na elipsi, važi da je

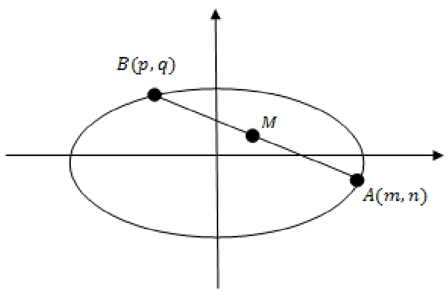
$$93m^2 + 186n^2 = 186 \cdot 93$$
$$93p^2 + 186q^2 = 186 \cdot 93,$$

odakle, oduzimanjem jednačina i zamenom početnog uslova, dobijamo da je

$$93 \cdot \frac{2 \cdot 2017}{217}(m-p) + 186\frac{2 \cdot 2017}{217}(n-q) = 0.$$

Deljenjem prethodne jednačine sa $m - p$ dobijamo da je

$$\frac{n-q}{m-p} = -\frac{\frac{6 \cdot 2017}{7}}{\frac{12 \cdot 2017}{7}} = -\frac{1}{2},$$



što predstavlja koeficijent pravca prave kroz tačke A i B, odnosno, $k_{AB} = -\frac{1}{2}$.

Tražena jednačina tangente je $p_{AB}: y - \frac{2017}{217} = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{2017}{217}\right)$.

Zadatak 17. Rešiti jednačinu $\sqrt[3]{2017 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{2017 - \sqrt{x}} = \sqrt[3]{2017}$.

Rešenje: Kako bi potkorena veličina bila definisana, mora da važi da je $x \geq 0$. Koristeći formulu za kub zbira $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$, dobijamo da je $2017 + \sqrt{x} + 3 \cdot \sqrt[3]{(2017+\sqrt{x})(2017-\sqrt{x})} \cdot \left(\sqrt[3]{2017+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{2017-\sqrt{x}}\right) + 2017 - \sqrt{x} = 2017$, odnosno $3 \cdot \sqrt[3]{2017^2 - x} \cdot \sqrt[3]{2017} = -2017$.

Odavde je, uz malo elementarnih transformacija, $2017^2 - x = -\frac{2017^2}{27}$, odnosno $x = 2017^2\frac{28}{27}$.

Zadatak 18. Rešiti jednačinu $x^{\log_{2017} x} = 4^{\log_{2017} x^2 + \log_{2017} 64}$.

Rešenje: Logaritmovanjem obeju strana jednačine za osnovu 2017 dobijamo da je

$$\log_{2017} x^{\log_{2017} x} = \log_{2017} 4^{2\log_{2017} x} + \log_{2017} 4^{\log_{2017} 64},$$

odnosno,

$$(\log_{2017} x)^2 = \log_{2017} 4 \cdot (2\log_{2017} x + \log_{2017} 64).$$

Lakšeg označavanja radi, uvešćemo smene $\log_{2017} x = t$ i $\log_{2017} 4 = m$.

Prethodna jednačina postaje $t^2 - 2mt + 3m^2 = 0$, odakle dobijamo da su rešenja $t_1 = -m$ i $t_2 = 3m$.

Vraćanjem smene dobijamo rešenja početne jednačine, $x_1 = \frac{1}{4}$ i $x_2 = 64$.

Literatura

[1] V. Andrić, Matematika X = 1236, *Priručnik za pripremanje za takmičenje učenika osnovnih škola od IV do VIII razreda*, Krug, Beograd, 2006.

[2] V. Baltić, D. Đukić, Đ. Krtinić, I. Matić, *Pripremni zadaci za matematička takmičenja srednjoškolaca u Srbiji*, DMS, Beograd, 2008.

[3] V. T. Bogoslavov, *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 3*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2010.

[4] Đ. Baralić, *300 pripremnih zadataka za juniorske matematičke olimpijade: iskustvo Srbije*, Klet, Beograd, 2014.

[5] S. B. Branković, *Zbirka rešenih zadataka iz matematike za srednje škole, odabrana poglavlja*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2007.

[6] Z. Kadelburg, V. Mićić, S. Ognjanović, *Analiza sa algebrom 2,* Krug, Beograd, 2002.

[7] Z. Kadelburg, P. Mladenović, *Savezna takmičenja iz matematike*, Društvo matematičara Srbije, Materijali za mlade matematičare, sveska 23, Beograd, 1990.

[8] J. Manojlović, D. Ilić, M. Ristić, D. Stevanović, M. Milošević, *Zbirka zadataka iz matematike za pripremu prijemnog ispita,* Prirodno-matematički fakultet u Nišu, Niš, 2011.

[9] D. J. Simjanović, M. D. Veljković, K. S. Golubović, *Zanimljivi zadaci o broju 2015*, Matematika i informatika 2 (4) (2015) 1-13.

[10] D. J. Simjanović, N. O. Vesić, *Broj 2014 u algebarskim zadacima*, Nastava matematike, LVIII, 1-2 (2013), 53–60.

[11] D. J. Simjanović, N. O. Vesić, *Zanimljivi algebarski zadaci sa brojem 2012,* Nastava matematike, LVII_1-2, (2012) 45-51

[12] V. Stojanović, *Odabrani zadaci sa matematičkih takmičenja*, treće izdanje, DMS, Beograd, 1984.

[13] Tangenta 10, *Zbirka zadataka objavljenih u rubrici „Zadaci iz matematike“ časopisa Tangenta 1995–2005. godine*, priredio B. Popović, DMS, Beograd, 2006.

[14] R. Tošić, *Matematički problemi ’97: 365 zadataka sa rešenjima sa raznih takmičenja u svetu*, Arhimedes, Novi Sad, 1997